ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option TA)

⁂

CONCOURS D'ADMISSION 1985

***

MATHÉMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION M

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II – M

Le problème comporte quatre parties indépendantes.

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel réel.

Soit N une norme définie sur E. L'espace (E, N) sera dit quadrilatéral si :

$$\forall\ (x, y, z) \in E^3\ ,$$

$$(H) \qquad N(x) + N(y) + N(z) + N(x + y + z) \geq N(x + y) + N(y + z) + N(z + x).$$

Il sera loisible de poser :

$$\Delta\ (x, y, z) = N(x) + N(y) + N(z) + N(x + y + z) - N(x + y) - N(y + z) - N(z + x).$$

1ère PARTIE

1° - Soit $E = \mathbb{R}$; considérons la norme : $x \longmapsto |x|$; démontrer que l'espace $(E, |.|)$ est quadrilatéral.

Indication : Pour démontrer l'inégalité (H), envisager d'abord le cas où l'un des réels x, y, z est nul, puis supposer que chacun des réels est différent de 0 et envisager les différentes possibilités sur les signes de ces réels.

2° - Soit $E = \mathbb{R}^3$; considérons les normes N_1 et N_∞ définies par :

$$\forall\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \qquad N_1(x) = |x_1| + |x_2| + |x_3|\ ,$$

$$N_\infty(x) = \text{Sup}\ (|x_1|, |x_2|, |x_3|)$$

Démontrer que (E, N_1) est quadrilatéral mais que (E, N_∞) ne l'est pas.

3° - Soit E l'espace vectoriel des applications continues de [-1, 1] dans $\mathbb{R}$. On pose, pour f appartenant à E :

$$||f||_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx\ ;\quad ||f||_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$$

a) Expliquer pourquoi ce sont des normes.

b) Montrer que $(E, ||.||_1)$ est quadrilatéral.

c) Montrer que $(E, ||.||_\infty)$ ne l'est pas, en considérant les fonctions :

$$x \longmapsto 2x^2 - 1,\quad x \longmapsto x^3 - x^2 + 1,\quad x \longmapsto - x^3 - x^2 + 1.$$

4° - Soit un espace quadrilatéral (E, N) de dimension 3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine attaché à l'espace vectoriel E ; soit d la distance définie sur $\mathcal{E}$ par :

$$\forall\ A \in \mathcal{E}\ ,\ \forall\ B \in \mathcal{E}\quad d(A, B) = N(\overrightarrow{AB}).$$

Soit O une origine de $\mathcal{E}$ et x, y, z trois vecteurs indépendants de E ; on appelle "parallélépipède engendré par x, y, z" (noté $P_{x,y,z}$) l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées dans le repère (O, x, y, z) valent 0 ou 1. Ces points sont les "sommets" de $P_{x,y,z}$.

Le segment joignant les sommets de coordonnées (a, b, c) et (a', b', c'), dont la "longueur" est N(a-a', b-b', c-c')), est appelé respectivement "arête" de $P_{x,y,z}$, "F-diagonale", "P-diagonale", selon que la quantité $|a-a'| + |b-b'| + |c-c'|$ vaut respectivement 1, 2 ou 3.

a) Faire une figure illustrant les définitions précédentes.

b) Prouver que le périmètre de $P_{x,y,z}$, somme des longueurs des arêtes, est supérieur ou égal à la somme des longueurs des F-diagonales, diminuée de la somme des longueurs des P-diagonales.

2ème PARTIE

L'objet de cette partie est de prouver qu'un espace vectoriel normé (E, n) de dimension 2 est toujours quadrilatéral. Soit $(x, y, z) \in E^3$; montrer que, si l'un au moins des vecteurs x, y, z, est nul, l'inégalité (H) est satisfaite. Chacun des vecteurs x, y, z sera supposé, dans la suite différent de zéro.

1° - Prouver qu'il existe trois réels a, b, c et une permutation φ de l'ensemble $\{x, y, z\}$ tels que :

$$(L)\qquad \begin{cases} a\ \varphi(x) + b\ \varphi(y) + c\ \varphi(z) = 0 \\ a \geqslant b \geqslant 0\ ;\ a \geqslant c\ ;\ a > 0 \end{cases}$$

Il sera posé dans la suite : $u = \varphi(x)$, $v = \varphi(y)$, $w = \varphi(z)$.

2° - Prouver (H) pour des vecteurs u, v, w tels que b = 0.

Indication : Montrer : $u = -k\,w$ avec $k \in]-\infty, 0[\cup]0, 1]$. Distinguer les possibilités $0 < k \leqslant 1$, $k < 0$, dans la dernière, envisager les deux cas : les vecteurs v et w sont dépendants ou non.

3° - On suppose, dans cette question $c \geqslant 0$ et $b > 0$.

a) Montrer qu'il existe k et ℓ appartenant à [0, 1] tels que $u + v = kv - \ell w$.

b) Conclure dans ce cas.

4° - On suppose à présent que : $c < 0 < b$.

a) Montrer qu'il existe k et ℓ appartenant à [0, 1] tels que :

$$u + v = kv + \ell\,(u + v + w).$$

b) Conclure dans ce cas.

.../

3ème PARTIE

L'objet de cette partie est de montrer qu'un espace euclidien E, muni de son produit scalaire $(.|.)$, est, pour la norme euclidienne déduite, un espace vectoriel normé quadrilatéral. Il sera posé :

$$\forall \ x \in E \qquad N(x) = \{(x|x)\}^{1/2}$$

Soient trois vecteurs donnés de E : x_1 , x_2 , x_3. Soit $A = \{1, 2, 3\}$.

Il sera supposé : $\forall\ i \in A \quad x_i \neq 0$. Soit :

$$\forall \ (i, j) \in A^2 \ , \ i \neq j \ , \quad T_{ij} = N(x_i) + N(x_j) - N(x_i + x_j).$$

1° - A quelle condition sur x_i et x_j , T_{ij} est-il nul ?

2° - Soit : $\forall\ (i, j) \in A^2$, $U_{ij} = N(x_i) + N(x_j) + N(x_i + x_j)$;

$$S_1 = \sum_{i=1}^{3} N(x_i) \ ;$$

$$S_2 = N(x_1 + x_2) + N(x_2 + x_3) + N(x_3 + x_1) \ ;$$

$$S_3 = N\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i \Big).$$

a) Démontrer

$$\forall\ (i, j) \in A^2 \ , \ i \neq j \ , \ U_{ij} \leqslant S_1 + S_3$$

b) Quand ces inégalités deviennent-elles des égalités ?

3° - Démontrer

$$(W) \qquad (S_1)^2 - (S_3)^2 = \sum_{i<j} T_{ij} \ U_{ij} = T_{12} \ U_{12} + T_{13} \ U_{13} + T_{23} \ U_{23} \ .$$

4° Démontrer les inégalités

$$\forall \ (k, \ell) \in A^2 \ , \ k < \ell \ , \ (S_1)^2 - (S_3)^2 \leqslant T_{k\ell} \ (S_1 + S_3) + \sum_{\substack{i<j \\ i \neq k, \ j \neq \ell}} T_{ij} \ U_{ij}.$$

En déduire la relation (H).

5° - Montrer que si l'inégalité (H) est une égalité pour trois vecteurs x_1, x_2, x_3, il vient alors :

$$\forall \ (i, j) \in A^2 \ , \ i < j \ : \quad T_{ij} \cdot (S_1 + S_3 - U_{ij}) = 0.$$

En déduire une relation vérifiée par ces vecteurs supposés deux à deux indépendants.

4ème PARTIE

Soit (E, N) un espace vectoriel normé quadrilatéral. Soit n un entier naturel, $n \geq 3$. Soit B la suite des entiers :

$$B = \{1, 2, \ldots, n\} .$$

Soient n vecteurs donnés x_i , $i \in B$; Posons :

$$\forall\, k \in B \quad , \quad S_{k,n} = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} N(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k})$$

La sommation, figurant au second membre, est étendue à toutes les suites strictement croissantes de k entiers extraits de B.

$$\forall\, k \in B \text{ et } 2 \leq k \leq n-1 , \quad R_{k,n} = C_{n-2}^{k-1}\ S_{1,n} + C_{n-2}^{k-2}\ S_{n,n} - S_{k,n} .$$

$$\forall\, k \in B \text{ et } k \neq n , \quad Q_{k,n} = C_{n-1}^{k}\ S_{1,n} + (k-1)\ S_{k+1,n} - (n-k)\ S_{k,n} .$$

Rappel : $\forall\, (p, n) \in \mathbb{N}^2$ et $0 \leq p \leq n$: C_n^p = nombre de parties de p éléments d'un ensemble de n éléments.

1° - Quel est le signe de $R_{2,3}$? Quelle est la valeur de $Q_{1,n}$?

2° - Démontrer :

$$\forall\, p \in B \text{ et } p \neq 1 , \quad R_{p-1,p} \geq 0 .$$

Indication : Démontrer cette relation par récurrence, en considérant pour un (p + 1)-uplet donné $(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1})$, le p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p + x_{p+1})$ et le triplet $\left(\sum_{i=1}^{p-1} x_i, x_p, x_{p+1}\right)$.

3° - En appliquant l'inégalité établie précédemment $R_{k,k+1} \geq 0$ au (k + 1)-uplet $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+1}})$ extrait de la suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, montrer l'inégalité :

$$\forall\, k \in B \text{ et } 2 \leq k \leq n-1 , \quad Q_{k,n} \geq 0.$$

4° - Etablir, en supposant $n \geq 4$, la relation :

$$\forall\, k \in B, \text{ et } 2 \leq k \leq n-2 , \quad Q_{k,n} + (k-1)R_{k+1,n} = (n-k)\ R_{k,n}.$$

En déduire le signe des nombres $R_{k,n}$, lorsque $2 \leq k \leq n-2$.